cv02

2.4) Mějme soustavu rovnic pro neznámé vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$

$$A\vec{x} + B\vec{y} = \vec{a}$$
$$C\vec{x} + D\vec{y} = \vec{b}$$

a) Vyjádřete soustavu ve tvaru $Pu = q$

$$\underline{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}}$$

b) Eliminujte $\vec{y}$ a najděte vzorec pro vektor $\vec{x}$ pro případ $\vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^m$ a $\vec{b}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B = \mathbb{R}^{m \times n}, C = \mathbb{R}^{n \times m}, D = \mathbb{R}^{n \times n}$$

Vyjádříme $\vec{y}$ z první, nebo druhé rovnice

$$\vec{y} = D^{-1}(\vec{b} - C\vec{x})$$
$$\downarrow$$
$$A\vec{x} + BD^{-1}(\vec{b} - C\vec{x}) = \vec{a}$$
$$(A - BD^{-1}C)\vec{x} + BD^{-1}\vec{b} = \vec{a}$$
$$(A - BD^{-1}C)\vec{x} = \vec{a} - BD^{-1}\vec{b}$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\vec{x} = (A - BD^{-1}C)^{-1}(\vec{a} - BD^{-1}\vec{b})}$$

$$\vec{y} = B^{-1}(\vec{a} - A\vec{x})$$
$$\downarrow$$
$$C\vec{x} + DB^{-1}(\vec{a} - A\vec{x}) = \vec{b}$$
$$(C - DB^{-1}A)\vec{x} + DB^{-1}\vec{a} = \vec{b}$$
$$(C - DB^{-1}A)\vec{x} = \vec{b} - DB^{-1}\vec{a}$$
$$\downarrow$$
$$\underline{\vec{x} = (C - DB^{-1}A)^{-1}(\vec{b} - DB^{-1}\vec{a})}$$

2.12) a) Dokažte vzorec Shermana a Morrisové

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

za předpokladu, že A je regulární a $v^TA^{-1}u + 1 \neq 0$

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$
$$I = (A + uv^T)A^{-1} - \frac{(A + uv^T)A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$
$$I = AA^{-1} + uv^TA^{-1} - \frac{AA^{-1}uv^TA^{-1} + uv^TA^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$
$$I = I + uv^TA^{-1} - \frac{uv^TA^{-1} + u(v^TA^{-1}u)v^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

skalár

$$I = I + uv^TA^{-1} - \frac{1uv^TA^{-1} + (v^TA^{-1}u)uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$
$$I = I + uv^TA^{-1} - \frac{\cancel{(1 + v^TA^{-1}u)}uv^TA^{-1}}{\cancel{1 + v^TA^{-1}u}}$$
$$I = I + uv^TA^{-1} - uv^TA^{-1}$$
$$I = I \quad \blacksquare$$

2.16) Dokažte, že pro každou čtvercovou matici A platí

a) $A + A^T$ je symetrická $\Rightarrow (A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T \quad \blacksquare$

b) $A - A^T$ je antisymetrická $\Rightarrow (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \quad \blacksquare$

c) Existuje právě jedna symetrická B a právě jedna antisymetrická C tak, že $A = B + C$

$$A = B + C$$
$$B = B^T$$
$$C = -C^T$$

$$A + A^T = B + C + B^T + C^T = \underbrace{B + B^T}_{2B} + \underbrace{C + C^T}_{0} = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}(A + A^T) \Rightarrow B \text{ je dána jednoznačně z } A$$
$$A - A^T = B + C - B^T - C^T = \underbrace{B - B^T}_{0} + \underbrace{C - C^T}_{2C} = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}(A - A^T) \Rightarrow C \quad \text{—||—}$$

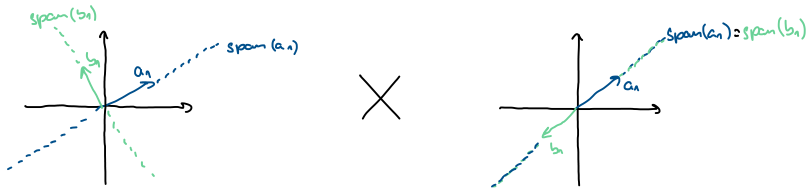
$(AB)^T = B^TA^T$

d) A^TA je symetrická $\Rightarrow (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA \quad \blacksquare$

3.13) Máme matice A a B se stejným počtem řádků. Jak byste ověřili, zda $\operatorname{rng} A = \operatorname{rng} B$, umíte-li spočítat hodnost libovolné matice?

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \end{pmatrix}}, \overset{B}{\begin{pmatrix} b_1, \dots, b_m \end{pmatrix}} \; ; \quad \text{Máme ověřit, zda platí } \operatorname{rng} A = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n) \overset{?}{=} \operatorname{span}(b_1, \dots, b_m) = \operatorname{rng} B$$

2D příklad



lineárně nezávislé $\Rightarrow \operatorname{span}(a_1) \neq \operatorname{span}(b_1)$ lineárně závislé $\Rightarrow \operatorname{span}(a_1) = \operatorname{span}(b_1)$

obecně

- Pokud $\operatorname{rng} A = \operatorname{rng} B$, musí platit $b_i \in \operatorname{rng} A \ \forall i$, tedy každý vektor b_i už leží v $\operatorname{rng} A$.
  Protože hodnost matice je dimenze jejího prostoru obrazů (pro $A = (a_1, \dots, a_n)$ platí $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{rng} A = \dim \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n)$), platí

$$\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n, b_i) \ \forall i = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$
$$\dim \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n) = \dim \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \; B]$$

Stejně $a_j \in \operatorname{rng} B \ \forall j \Rightarrow \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} [B \; a_j] \ \forall j \Rightarrow \operatorname{rank} B = \operatorname{rank} [B \; A] = \operatorname{rank} [A \; B]$

Tedy $\operatorname{rng} A = \operatorname{rng} B \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \; B] = \operatorname{rank} B$

- Pokud $\operatorname{rng} A \neq \operatorname{rng} B$, potom $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} [A \; B]$ nebo $\operatorname{rank} B \neq \operatorname{rank} [A \; B]$

Aby platilo $\operatorname{rng} A = \operatorname{rng} B$, musí platit $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \; B] = \operatorname{rank} B$

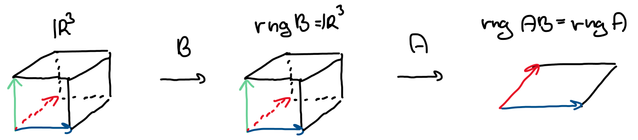
3.15) Dokažte, že pro libovolné matice A, B platí

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

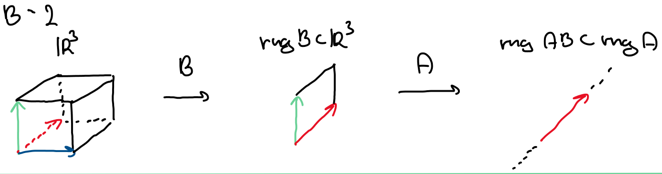
využijeme $\operatorname{rng}(AB) \subseteq \operatorname{rng}(A) \Rightarrow$ dobře se dá představit, pokud vnímáme AB jako složení lin. zobrazení

př.: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; $\operatorname{rank} A = 2$

i) $\operatorname{rank} B = 3$ (B zachová bijekci)



ii) $\operatorname{rank} B = 2$



$\operatorname{rng} AB \subseteq \operatorname{rng} A$

potom

$$\operatorname{rng}(AB) \subseteq \operatorname{rng}(A) \Rightarrow \operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A)$$
$$\operatorname{rng}((AB)^T) = \operatorname{rng}(B^T A^T) \subseteq \operatorname{rng}(B^T) \Rightarrow \underbrace{\operatorname{rank}(B^T A^T)}_{= \operatorname{rank}(AB)} \leq \underbrace{\operatorname{rank}(B^T)}_{= \operatorname{rank}(B)} \Rightarrow \operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB) &\leq \operatorname{rank}(A) \\ \operatorname{rank}(AB) &\leq \operatorname{rank}(B) \end{aligned}\right\} \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$