Ortogonalita

- množina vektorů $\{x_1, \dots, x_k\}$ je ortonormální, pokud
  - i) každý vektor je normalizovaný ($\|x_i\| = 1 = x_i^T x_i$)
  - ii) každá dvojice vektorů je ortogonální ($x_i^T x_j = 0$ pro $i \neq j$)

- matice je ortogonální, pokud
  - i) je čtvercová
  - ii) její sloupce tvoří ortonormální množinu

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) je čtvercová} \\ \text{ii) její sloupce tvoří ortonormální množinu} \end{array}\right\} A^TA = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1} \Leftrightarrow AA^T = I$$

- QR rozklad

každá matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na $A = QR$, kde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální a
$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková

4.6) Najděte ortonormální bázi podprostoru $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ pomocí QR rozkladu

$$[Q,R] = qr(\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{A = [a_1\ a_2\ a_3]}) \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \doteq \overbrace{\begin{bmatrix} -0.50 & 0.87 & 0.00 & 0.00 \\ -0.50 & -0.29 & -0.41 & 0.71 \\ -0.50 & -0.29 & -0.41 & -0.71 \\ 0.50 & 0.29 & -0.82 & 0.00 \end{bmatrix}}^{\text{ortogonální } 4 \times 4} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \doteq \overbrace{\begin{bmatrix} -2.00 & 0.50 & -1.00 \\ 0.00 & 2.60 & -1.73 \\ 0.00 & 0.00 & -2.45 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}}^{\text{horní trojúhelníková } 4 \times 3}$$

$$a_1 = r_{11} q_1$$
$$a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$
$$a_3 = r_{13} q_1 + r_{23} q_2 + r_{33} q_3$$

Protože jsou vektory a_1, a_2, a_3 lineárními kombinacemi sloupců q_1, q_2, q_3 matice Q ($A = QR$), platí
$$\text{span}\{a_1, a_2, a_3\} = \text{span}\{q_1, q_2, q_3\}$$
a $\{q_1, q_2, q_3\}$ je tedy hledaná ortonormální báze.

4.4) Jsou dány množiny $X = \text{span}\{(1,0,1,0)\}$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ a $Z = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_2 = x_4\}$.

1) Jsou to lineární podprostory? Pokud ano, najděte jejich dimenze.

- X je lineární obal $\Rightarrow$ je lineární podprostor ✓
  dim X je počet prvků v bázi ; $b_X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim X = 1$
- Y je ve formě $a^Tx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ je lineární podprostor null((1 0 1 0)) ✓
  Bázi podprostoru nalezneme jako lineárně nezávislé řešení rovnice $a^Tx = 0$.
  Protože pracujeme v $\mathbb{R}^4$, hledaný prostor bude mít dimenzi $4 - 1 = 3$ (máme 1 rovnici).
  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b_Y = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ;\ Y = \text{span}\ b_Y \Rightarrow \dim Y = 3$$
- Z je ve formě $A^Tx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ ✓
  Podobně jako Y, jen máme 2 lin. nezávislé rovnice $\Rightarrow$ dimenze bude $4 - 2 = 2$
  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b_Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ;\ Z = \text{span}\ b_Z \Rightarrow \dim Z = 2$$

2) Rozhodněte, které z následujících výroků platí:

i) $X \perp Y$ ⇒ aby platilo, musí být každý vektor z báze X kolmý na každý vektor báze Y

$$b_x \; (1 \; 0 \; 1 \; 0) \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{b_Y} = (0 \; 0 \; 0) \checkmark$$

(všimněme si, že to přesně odpovídá $a^T x$ ze zadání prostoru Y)

ii) $X \perp Z$ ⇒ lze vyřešit jako i), nebo si všimneme, že $Z \subseteq Y$. Potom $X \perp Y \Rightarrow X \perp Z$ ✓

iii) $Y \perp Z$ ⇒ protože $Z \subseteq Y$ a Z obsahuje nenulový vektor, nemůže platit $Y \perp Z$ ✗

iv) $X = Y^\perp$ ⇒ platí, protože Y je zadáno jako $X^\perp$ (Y jsou všechny vektory kolmé na b_x) ✓

v) $Y = X^\perp$ ⇒ platí, viz iv) $\quad (X = Y^\perp \Leftrightarrow X^\perp = Y)$ ✓

vi) $X = Z^\perp$ ⇒ nemůže platit, protože $\dim X \neq \dim Z^\perp$ $(1 \neq 2)$ ✗

3) Najděte libovolnou bázi podprostoru $Z^\perp$

Hledáme vektory kolmé na všechny vektory v bázi Z. To jsou však přesně vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ze zadání (vlastnost $(\text{null } A)^\perp = \text{rng } A^T$).

4.12) Máme vektory $x_1 = (1,-1,0,2)$; $x_2 = (1,1,1,0)$; $x_3 = (-1,-1,2,0)$

a) Ověřte, že vektory x_1, x_2, x_3 jsou po dvojicích ortogonální

$x_1^T x_2 = 0$ ✓ $\quad x_2^T x_3 = 0$ ✓ $\quad x_3^T x_1 = 0$ ✓

b) Najděte libovolnou bázi podprostoru $\text{span}\{x_1, x_2, x_3\}^\perp$

hledáme vektor kolmý na všechny vektory x_1, x_2, x_3

⇒ řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.14) Spočítejte co nejjednodušším způsobem inverzi matice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ matice je ortogonální, tedy $A^{-1} = A^T$

4.16) Jak byste lemě spočítali absolutní hodnotu determinantu matice z jejího QR rozkladu?

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $A = QR$, kde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální a
$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková

$$|\det(A)| = |\det(QR)| = \underbrace{|\det(Q)|}_{1} \cdot |\det(R)| = |\det(R)| = \prod_{i=1}^{n} |r_{ii}|$$

4.20) Zobrazení $F: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je dané vzorcem $F(X) = (I-X)(I+X)^{-1}$. Dokažte (pro $I+X$ regulární)

a) $(I-X)(I+X) = (I+X)(I-X)$

$$I^2 - XI + IX - X^2 = I^2 + XI - IX - X^2$$
$$I - X + X - X^2 = I + X - X - X^2$$
$$I = I \quad \boxtimes$$

b) $(I-X)(I+X)^{-1} = (I+X)^{-1}(I-X) \quad / \cdot (I+X)$

$$(I-X) = (I+X)^{-1}(I-X)(I+X) \quad / \; (I+X)\cdot$$
$$(I+X)(I-X) = (I-X)(I+X) \quad \boxtimes \text{ (z a))}$$

c) $X^T = -X \Rightarrow F(X)^T F(X) = I$

$$\left[(I-X)(I+X)^{-1}\right]^T (I-X)(I+X)^{-1} = I$$
$$(I+X)^{-T}(I-X)^T(I-X)(I+X)^{-1} = I$$
$$(I^T+X^T)^{-1}(I^T-X^T)(I-X)(I+X)^{-1} = I$$
$$(I-X)^{-1}(I+X)(I-X)(I+X)^{-1} = I \quad / \cdot (I+X)$$
$$(I-X)^{-1}(I+X)(I-X) = (I+X) \quad / \; (I-X)\cdot$$
$$(I+X)(I-X) = (I-X)(I+X) \quad \boxtimes \text{ (z a))}$$

d) $X^TX = XX^T = I \Rightarrow F(X)^T = -F(X)$

$$\left[(I-X)(I+X)^{-1}\right]^T = -(I-X)(I+X)^{-1}$$
$$(I+X)^{-T}(I-X)^T = -(I-X)(I+X)^{-1} \quad / \cdot (I+X)$$
$$(I+X)^{-T}(I-X)^T(I+X) = -(I-X) \quad / \; (I+X)^T\cdot$$
$$(I-X)^T(I+X) = -(I+X)^T(I-X)$$
$$(I^T-X^T)(I+X) = -(I^T+X^T)(I-X)$$
$$I - X^T + X - X^TX = -(I + X^T - X - X^TX)$$
$$I - X^T + X - I = -(I + X^T - X - I)$$
$$X - X^T = -(X^T - X)$$
$$X - X^T = X - X^T$$
$$I = I \quad \boxtimes$$