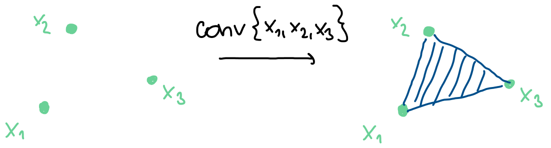
cv07

Konvexní množiny a mnohostěny

- množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud $x \in X,\ y \in X,\ \alpha \in [0,1] \Rightarrow (1-\alpha)x + \alpha y \in X$

  ↳ X je konvexní, pokud pro každé dva body z X obsahuje i všechny body na úsečce spojující dané body

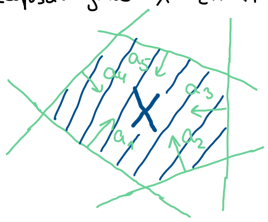
- konvexní kombinace $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ je kombinace $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ a $\alpha_i \geq 0\ \forall i = 1, \dots, k$
- konvexní obal je množina všech konvexních kombinací



(pro nekonečnou množinu X je definováno jako průnik všech konvexních množin, které X obsahují)

- konvexní mnohostěn je průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů

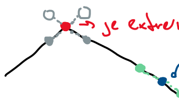
  ⇒ lze zapsat jako $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i\ \forall i = 1, \dots, m\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$



Extremální body

- bod $x \in X$ je extremální bod konvexní množiny X, pokud neexistují dva různé body z X takové, že x je střed úsečky, která dané dva body spojuje, t.j. platí

  $x_1, x_2 \in X\ ,\ x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



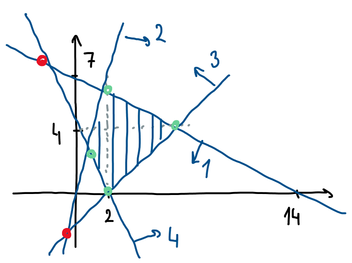
- jak hledat: pro bod $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ je ekvivalentní
  - bod x je extremální bod mnohostěnu $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$

    ⇕
  - existuje neprázdná množina $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tak, že $\underbrace{A_I x = b_I}_{\text{bod } x \text{ leží na hranici množiny}}$ a $\underbrace{\text{sloupce } A_I \text{ jsou lin. nezávislé}}_{\text{soustava má právě jedno řešení}}$

    ⇒ hranice poloprostorů se protínají v právě jednom bodě

13.10) Chceme najít všechny extremální body mnohostěnu $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$



$I = \{1,2\}$: $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 0 & -7 & -42 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$

$A\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \geq b$, je extremální ✓

$I = \{1,3\}$: $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

$A\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \geq b$, je extremální ✓

$I = \{1,4\}$: $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & -24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$

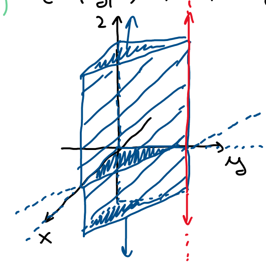
$A\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} \geq b$, není extremální ✗

atd...

13.11) Které z následujících mnohostěnů mají alespoň jeden extremální bod?
Naleznete libovolný extremální bod, nebo přímku v mnohostěnu, pokud ex. bod neexistuje.

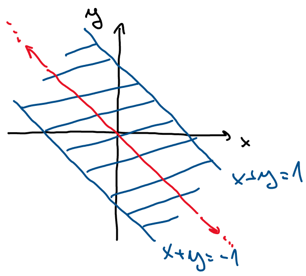
a)
- $\emptyset$ ... nemá ani ex. bod, ani přímku
- $\mathbb{R}^n$ ... přímka $\{x+\alpha e_i \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- Intervaly $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, $[a,b]$ ... ex. bod 'a'
- affinní podprostor ... obsahuje přímku (pro dim > 0, jinak jeden bod ⇒ ex. bod)
- polopřímka $\{x+\alpha v \mid \alpha \geq 0\}$ ... ex. bod x
- poloprostor ... obsahuje přímku
- $\mathbb{R}^n_+$ ... ex. bod O
- panel ... obsahuje přímku
- hyperkrychle $[-1,1]^n$ ... ex. body jsou vrcholy krychle
- hyperkvádr ... -//-
- simplex ... vrcholy simplexu jsou ex. body
- std. simplex ... -//- $(e_1, \dots, e_n)$
- křížový polytop ... vrcholy polytopu jsou ex. body $[1,0,\dots,0]$, $[-1,0,\dots,0]$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



obsahuje přímku např. $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\{(a,1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x+y \leq 1\}$



obsahuje přímku např. $\left\{\alpha \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$