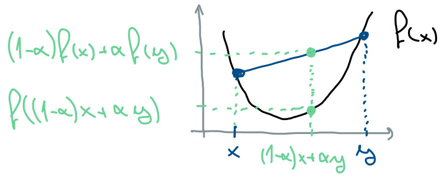
Konvexní funkce

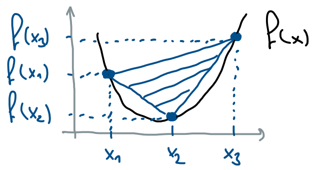
- funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$, jestliže
  $x \in X, y \in X, 0 \le \alpha \le 1 \Rightarrow f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)$



geometrická interpretace:
úsečka spojující $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$
leží nad grafem funkce f

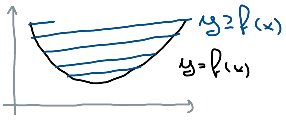
- Jensenova nerovnost: f je konvexní, právě když

$$\left.\begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \in X \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \ge 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \end{array}\right\} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$



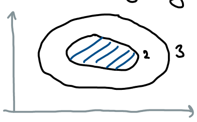
geometrická interpretace:
mnohostěn leží nad grafem funkce f

- epigraf: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \le y\}$



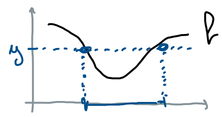
funkce je konvexní, právě když její epigraf je konvexní množina

- subkontura výšky y: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le y\}$



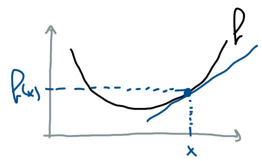
každá subkontura konvexní funkce je konvexní množina

pozor! obrácená implikace neplatí



každá subkontura je konvexní, ale funkce konvexní není

- podmínka 1. řádu: f je konvexní na $\mathbb{R}^n$, právě když
  $f(y) \ge f(x) + f'(x)(y-x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$



tečna je pod grafem funkce

- podmínka 2. řádu: f je konvexní na $\mathbb{R}^n$, právě když je Hessova matice $f''(x)$ pozitivně semidefinitní na celém $\mathbb{R}^n$

- operace zachovávající konvexitu funkcí
  i) nezáporná lineární kombinace $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i \; ; \alpha_i \ge 0 \;\; \forall i = 1, \dots, k$, g_i je konvexní
  $\Rightarrow f$ je konvexní

  ii) skládání funkcí
  $$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ konvexní} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ konvexní, neklesající!} \end{array}\right\} g \circ f = g(f(x)) \text{ je konvexní}$$
  (obecně neplatí)

  iii) maximum $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in I$ jsou konvexní
  $\Rightarrow f(x) = \max_{i \in I} g_i(x)$ je konvexní

Konvexní optimalizace

- Nechť funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
  Pak každé lokální minimum funkce f na množině X je zároveň globální.

16.5) Může být součet nekonvexních funkcí konvexní funkce? Najděte protipříklad.

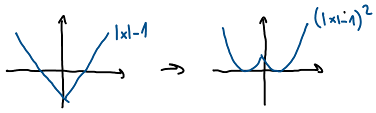
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \sin(x) \\ g(x) &= x^2 - \sin(x) \end{aligned}\right\} f(x) + g(x) = 2x^2$$

16.11) Dokažte, že funkce jsou nekonvexní

a) $f(x) = \sum_{i=1}^{m} (\|x - a_i\| - y_i)^2$ ... m satelitů se souřadnicemi $a_1, \dots, a_m \in R^n$; naměřené vzdálenosti $y_1, \dots, y_m$

zvolíme $n=1, m=1$: $f(x) = (|x - a_1| - y_1)^2$

pro $a_1 = 0$, $y_1 = 1$: $f(x) = (|x| - 1)^2$



nekonvexní

$f(-1) = f(1) = 0$, ale $f(0.5 \cdot (-1) + 0.5 \cdot 1) = f(0) = 1 \overset{!}{>} 0.5 f(-1) + 0.5 f(1) = 0$