cv09

Lineární programování

- Minim./maxim. lineární funkce za omezujících podmínek ve tvaru lineárních rovnic a nerovnic

tvar i) (min a pouze $\ge$)

min $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

z.p. $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$; $i = 1,\dots,m$

$\Updownarrow$

$\min\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}, Ax \ge b\}$

triky na převedení

$\max c^Tx \Rightarrow \min -c^Tx$

$a^Tx \le b \Rightarrow -a^Tx \ge -b$

$a^Tx = b \Leftrightarrow a^Tx \ge b \wedge -a^Tx \ge -b$

tvar ii) (rovnicový tvar)

min $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

z.p. $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$; $i = 1,\dots,m$

$x_j \ge 0$; $j = 1,\dots,n$

$\Updownarrow$

$\min\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \ge 0\}$

triky na převedení

$a^Tx \ge b \Rightarrow a^Tx - u = b \wedge u \ge 0$ (slacková proměnná)

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^+ \ge 0 \wedge x^- \ge 0 \wedge x = x^+ - x^-$

další triky:

nahrazení max{...}

min max$\{2x+y, x-y\}$ $\Rightarrow$ min z

z.p. ... $\qquad$ z.p. $2x+y \le z$

$x - y \le z$

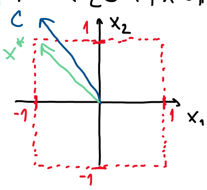
...

nahrazení $|x|$

$|x| = \max\{x, -x\}$, potom $\uparrow$

12.3) Vyřešte úvahou

b) $\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, -1 \le x \le 1\}$

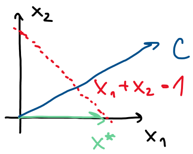


$x_i^* = \mathrm{sgn}(c_i)$

$f(x^*) = \sum_{i=1}^n |c_i| = \|c\|_1$

c) $\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0, \mathbb{1}^Tx = 1\}$

$\mathbb{1}^Tx = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 1$



$x_i^* = \begin{cases} \frac{1}{k}, & i \in \operatorname{argmax}_{i=1,\dots,n} c_i \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$; $k = |\operatorname{argmax}_{i=1,\dots,n} c_i|$

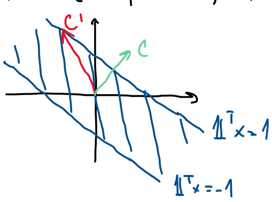
$f(x^*) = \max\{c_i, i = 1,\dots,n\}$

d) $\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0, \mathbb{1}^Tx \le 1\}$

pokud ex. $c_i > 0$, pak stejné jako c)

jinak $x_i^* = 0$, $f(x^*) = 0$

e) $\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, -1 \le \mathbb{1}^Tx \le 1\}$



pro $c = (a,\dots,a)$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow c^Tx^* = |a|$

jinak je úloha neomezená

12.4) Pokuste se úlohy transformovat na LP. Pokud to nedokážete, vysvětlete proč

c) $\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, |d^Tx| \le 1, x \ge 0\}$

$\downarrow$ $\max\{d^Tx, -d^Tx\} \le 1$

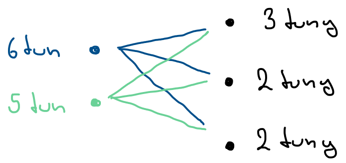
$\max\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, d^Tx \le 1, -d^Tx \le 1, x \ge 0\}$

f) $\min\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, \|Ax - b\|_\infty \le 1\}$

$\downarrow$ $\|Ax - b\|_\infty = \max\{|(Ax-b)_i| ; i = 1,\dots,n\} \le 1$

$\min\{c^Tx \mid x \in \mathbb{R}^n, -1 \le Ax - b \le 1\}$

12.10) skladу střelnice



zavedeme x_{ij} ... množství střeliva ze skladu i na střelnici j

účelová funkce $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^{2\times 3}} \left(\max \{ x_{ij},\ i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2,3\} \} \right)$

$\downarrow$ není lineární, lze ale převést

$\min \quad z$

z.p. $x_{ij} - z + \mu_{ij} = 0 \quad \forall i,j \qquad [x_{ij} \leq z]$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \mu_1 = 6 \qquad [x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 6]$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \mu_2 = 5 \qquad [x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5]$

$x_{11} + x_{21} = 3$

$x_{12} + x_{22} = 2$

$x_{13} + x_{23} = 2$

$x_{ij} \geq 0$

$\mu_{ij} \geq 0$

$\mu_1, \mu_2 \geq 0$