cv10

LP dualita

primární úloha $\longleftrightarrow$ duální úloha

primární úloha	duální úloha	
$\min \sum_{j\in J} c_j x_j$	$\max \sum_{i\in I} b_i y_i$	
z.p. $\sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i$	z.p. $y_i \in \mathbb{R}$	$\forall i \in I_0$
$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \ge b_i$	$y_i \ge 0$	$\forall i \in I_+$
$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \le b_i$	$y_i \le 0$	$\forall i \in I_-$
$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i = c_j$	$\forall j \in J_0$
$x_j \ge 0$	$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i \le c_j$	$\forall j \in J_+$
$x_j \le 0$	$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i \ge c_j$	$\forall j \in J_-$

$I = \{1,\dots,m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-$

$J = \{1,\dots,n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-$

věta o slabé dualitě

Nechť x je přípustné primární řešení a y přípustné duální řešení. Pak

$$c^T x \ge b^T y$$

$\Rightarrow$ Nechť x, y jsou přípustná řešení a $c^T x = b^T y$.
Potom je x optimální pro primární úlohu a y je optimální pro duální úlohu.

věta o komplementaritě

Nechť x/y je přípustné primární/duální řešení. Potom $c^T x = b^T y$ právě tehdy, když platí

$$\left.\begin{array}{llll} \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \in I \quad \text{a} \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_{i\in I} a_{ij}y_i = c_j & \forall j \in J \end{array}\right\} \text{podmínky komplementarity}$$

věta o silné dualitě

Primární úloha má optimální řešení, právě když má duální úloha optimální řešení.
Má-li primární/duální úloha optimální řešení x/y, potom $c^T x = b^T y$.

15.1) Dokažte, že dual duálu se rovná původní úloze.

a)
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{z.p.} & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{array} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{z.p.} & y \ge 0 \\ & A^T y \le c \end{array}}$$

$$\begin{array}{ll} \min & -b^T y \\ \text{z.p.} & A^T y \le c \\ & y \ge 0 \end{array} \xrightarrow{y' = -y} \begin{array}{ll} \min & b^T y' \\ \text{z.p.} & A^T y' \ge -c \\ & y' \le 0 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{ll} \max & -c^T x \\ \text{z.p.} & x \ge 0 \\ & A^T x \ge b \end{array} \rightarrow \underline{\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{z.p.} & x \ge 0 \\ & A^T x \ge b \end{array}}$$

15.4) Dokažte bez užití algoritmu na řešení LP, že $x=(1,1,1,1)$ je optimální řešení soustavy

primární úloha

$$\min \begin{bmatrix} 47 & 93 & 17 & -93 \end{bmatrix} x$$

z.p.
$$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^4$$

dualita
$\longleftrightarrow$

$$\max \begin{bmatrix} -3 & 5 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} y$$

z.p.

$$y \in \mathbb{R}^5, \; y \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 3 & -11 & 6 \\ 1 & 7 & -10 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{bmatrix}$$

podmínky komplementarity

$$\begin{array}{lll}
\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = -3 & \text{nebo} & y_1 = 0 \\
\begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 & 1 \end{bmatrix} x = 5 & \text{nebo} & y_2 = 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & 3 & -10 & -1 \end{bmatrix} x = -8 & \text{nebo} & y_3 = 0 \\
\begin{bmatrix} -6 & -11 & -2 & 12 \end{bmatrix} x = -7 & \text{nebo} & y_4 = 0 \\
\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} x = 4 & \text{nebo} & y_5 = 0
\end{array}$$

$\Downarrow$ pro $x=(1,1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{lllll}
-1-6+1+3 = -3 & = & -3 & \Rightarrow & y_1 \leq 0 \\
-1-2+7+1 = 5 & = & 5 & \Rightarrow & y_2 \leq 0 \\
0+3-10-1 = -8 & = & -8 & \Rightarrow & y_3 \leq 0 \\
-6-11-2+12 = -7 & = & -7 & \Rightarrow & y_4 \leq 0 \\
1+6-1-3 = 3 & \neq & 4 & \Rightarrow & y_5 = 0
\end{array}\right\}
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -6 \\ -6 & -2 & 3 & -11 \\ 1 & 7 & -10 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$c^T x = \begin{bmatrix} 47 & 93 & 17 & -93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 64 \qquad b^T y = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} = 64$$

$c^T x = b^T y$, (x,y) musí být optimální řešení