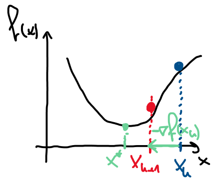
cv12

Gradientní metoda

· minimalizace diferencovatelné funkce

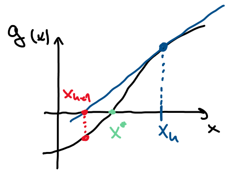


• ve směru $\nabla f(x)$ funkce $f(x)$ roste ($f_v(x) = f'(x)\cdot v = \nabla f(x)^T v = \|\nabla f(x)\|^2$ pro $v = \nabla f(x)$), tzn. ve směru $-\nabla f(x)$ klesá

$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)$$

Newtonova (-Raphsonova) metoda

a) Řešení soustav nelineárních rovnic ($g(x)=0$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$)

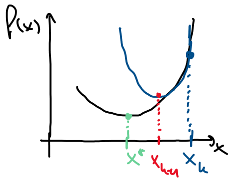


• místo hledání nulového bodu $g(x)$ opakovaně najdeme nulový bod afinní aproximace

$$T^1_{x_k}(x) = g(x_k) + g'(x_k)(x-x_k) \overset{!}{=} 0 \quad \text{pro } x_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^{-1} g(x_k) \quad \text{pro regulární } g'(x_k)$$

b) Minimalizace dvakrát diferencovatelné funkce ($f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$)



• hledáme extrém funkce $f(x)$ ⇔ nulový bod funkce $g(x) = f'(x)^T$ pomocí a):

$$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^{-1} g(x_k) = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$$

Gauss-Newtonova metoda

• přibližné řešení přeurčené soustavy nelineárních rovnic $g(x)=0$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ve smyslu nejmenších čtverců $f(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x)^2 = \|g(x)\|^2$

⇒ využijeme aproximaci afinním zobrazením $T^1_{x_k}(x) = g(x_k) + g'(x_k)(x-x_k)$

známe:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|^2$$

$$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

teď:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|g(x)\|^2 \approx \min_{x\in\mathbb{R}^n}\|\underbrace{g(x_k)}_{-b} + \underbrace{g'(x_k)}_{A}\underbrace{(x-x_k)}_{x}\|^2$$

$$(x_{k+1}-x_k) = (g'(x_k)^Tg'(x_k))^{-1} g'(x_k)^T\cdot(-g(x_k))$$

$$x_{k+1} = x_k - (g'(x_k)^Tg'(x_k))^{-1}g'(x_k)^Tg(x_k)$$

Levenberg-Marquardtova metoda

• regularizace: $g'(x)^Tg'(x)$ může být singulární (nebo blízko singulární), ale $g'(x)^Tg'(x)+\mu_k I$ bude vždy regulární pro $\mu_k>0$

$$x_{k+1} = x_k - (g'(x_k)^Tg'(x_k) + \mu_k I)^{-1} g'(x_k)^T g(x_k)$$

Rozdíl mezi Newtonovou metodou (b)) a GN metodou

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \|g(x)\|^2 = g(x)^Tg(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x)^2 \quad ; \; g_i(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

Newton

$$x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)^T$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^m 2g_i(x)g_i'(x) = 2g(x)^Tg'(x)$$

$$f''(x) = \underbrace{2g'(x)^Tg'(x)}_{\mathbb{R}^{n\times n}} + 2\sum_{i=1}^m \underbrace{g_i(x)}_{\mathbb{R}}\underbrace{g_i''(x)}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$$

Po dosazení do iteračního schématu:

$$x_{k+1} = x_k - \left(g'(x_k)^Tg'(x_k) + \sum_{i=1}^m g_i(x_k)g_i''(x_k)\right)^{-1} g'(x_k)^Tg(x_k)$$

GN

$$x_{k+1} = x_k - (g'(x_k)^Tg'(x_k))^{-1}g'(x_k)^Tg(x_k)$$

GN můžeme vnímat jako aproximaci Newtonovy metody na minimalizaci $f(x) = \|g(x)\|^2$

→ výhoda: vyhneme se počítání $g_i''(x_k)$

10.8) Soustavu dvou rovnic o jedné neznámé

$$x^2+x=1$$
$$x^2-x=1$$

chceme řešit přibližně ve smyslu nejm. čtverců

$$g(x)=\begin{bmatrix} x^2+x-1 \\ x^2-x-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; \min_{x\in\mathbb{R}} \|g(x)\|^2 = \min_{x\in\mathbb{R}} g(x)^T g(x)$$

Napište iteraci a) Gauss-Newtonovy metody

$$g'(x)=\begin{bmatrix} 2x+1 \\ 2x-1 \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1}=x_k-\left(g'(x_k)^T g'(x_k)\right)^{-1} g'(x_k)^T g(x_k)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(2x+1)(x^2+x-1)+(2x-1)(x^2-x-1)}{(2x+1)^2+(2x-1)^2}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2x^3+\cancel{2x^2}-2x+\cancel{x^2}+x-\cancel{1}+2x^3-\cancel{2x^2}-2x-\cancel{x^2}+x+\cancel{1}}{4x^2+4x+1+4x^2-4x+1}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{4x^3-2x}{8x^2+2} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{2x_k^3-x_k}{4x_k^2+1}$$

b) Čisté Newtonovy metody

$$f(x)=\|g(x)\|^2=(x^2+x-1)^2+(x^2-x-1)^2$$

$$f'(x)=2(x^2+x-1)(2x+1)+2(x^2-x-1)(2x-1)=2(2x^3+\cancel{2x^2}-2x+\cancel{x^2}+x-\cancel{1})+2(2x^3-\cancel{2x^2}-2x-\cancel{x^2}+x+\cancel{1})$$
$$=4x^3-2x+4x^3-2x=8x^3-4x$$

$$f''(x)=24x^2-4$$

$$x_{k+1}=x_k-f''(x)^{-1}f'(x)^T \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{2x_k^3-x_k}{6x_k^2-1}$$

10.9) Máme soustavu rovnic

$$x+y-2xy=1$$
$$-x+y+xy=-3$$
$$x-y+xy=1$$

i) Je soustava lineární? Není, obsahuje monomy druhého řádu $x.y$

ii) Kolik má řešení?

· Označíme $z=xy$. Poté dostáváme lin. soustavu v x,y,z

$$\begin{aligned} x+y-2z&=1 \\ -x+y+z&=-3 \\ x-y+z&=1 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x&=1/2 \\ y&=-3/2 \\ z&=-1 \end{aligned}$$

$xy \neq z \Rightarrow$ řešení neexistuje

Řešte přibližně:

$$g(x,y)=\begin{bmatrix} x+y-2xy-1 \\ -x+y+xy+3 \\ x-y+xy-1 \end{bmatrix}$$

$$g'(x,y)=\begin{bmatrix} 1-2y & 1-2x \\ -1+y & 1+x \\ 1+y & -1+x \end{bmatrix}$$

$$f(x,y)=\|g(x,y)\|^2=(x+y-2xy-1)^2+(-x+y+xy+3)^2+(x-y+xy-1)^2$$

$$f'(x,y)=\left[2(x+y-2xy-1)(1-2y)+2(-x+y+xy+3)(-1+y)+2(x-y+xy-1)(1+y) \;\ldots\; 2(x+y-2xy-1)(1-2x)+2(-x+y+xy+3)(1+x)+2(x-y+xy-1)(-1+x)\right]$$
$$=\left[12xy^2-8xy+6x-4y^2+6y-10 \; ; \; 12x^2y-4x^2+6x-8xy+6y+6\right]$$

$$f''(x,y)=\begin{bmatrix} 12y^2-8y+6 & 24xy-8x-8y+6 \\ 24xy-8x-8y+6 & 12x^2-8x+6 \end{bmatrix}$$

a) gradientní metodou

$$x_{k+1}=x_k-f'(x_k)^T$$

b) Newtonovou metodou

$$x_{k+1}=x_k-f''(x_k)^{-1}f'(x_k)^T$$

c) Gauss-Newtonovou metodou

$$x_{k+1}=x_k-\left(g'(x_k)^T g'(x_k)\right)^{-1} g'(x_k)^T g(x_k)$$

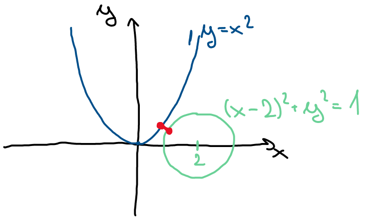
d) Levenberg-Marquardtovou metodou

$$x_{k+1}=x_k-\left(g'(x_k)^T g'(x_k)+\mu_k I\right)^{-1} g'(x_k)^T g(x_k)$$

10.10, Najděte vzdálenost množiny $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y\}$ od kružnice s poloměrem 1 a středem v $(2,0)$.
Lze nalézt řešení pomocí minimalizace soustavy $\{x^2=y,\ (x-2)^2+y^2=1\}$ ve smyslu nejm. čtverců?

- Nelze, správná formulace je

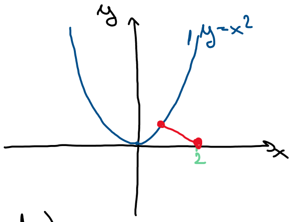
$$\min\left\{\left\|\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right\|^2 \;\middle|\; y=x^2,\ (u-2)^2+v^2=1\right\} =$$
$$= \min\left\{(x-u)^2+(y-v)^2 \mid y=x^2,\ (u-2)^2+v^2=1\right\}$$



formulace $\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}} (x^2-y)^2+((x-2)^2+y^2-1)^2$ je chybná

- Úloha lze vyřešit převedením na hledání minima funkce jedné proměnné tak, že budeme hledat bod na $y=x^2$ nejblíže bodu $(2,0)$

$$\min\left\{(x-2)^2+y^2 \mid x,y\in\mathbb{R}^2,\ y=x^2\right\}$$



$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2+x^4$
$f'(x) = 4x^3+2x-4$

$f'(x)=0$ pro $x \doteq 0.83512$ (např. pomocí Newtonovy metody)